

УДК 371+13

Григорий Михайлович СЕРЕГИН, кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии и методики обучения математике Новосибирского государственного педагогического университета, г. Новосибирск; e-mail: gseryogin@yandex.ru

Типология школьных математических задач

В статье рассматриваются различные классификации и типологии математических задач: по характеру мыслительной деятельности учащихся, по дидактическим целям, по типу мышления в процессе решения и другие. Была выделена такая типология задач, которая может быть применена в учебном процессе при мониторинге понимания учебного материала.

Ключевые слова: математическая задача; классификация; типология; мыслительная деятельность.

Grigory M. SERYOGIN, Candidate of Pedagogical Sciences, Associate Professor, Chair of Geometry and Technique Training to the Mathematician, Novosibirsk State Pedagogical University, Novosibirsk; e-mail: gseryogin@yandex.ru

Typology of school mathematical problems

The article discusses various classifications and typologies of mathematical problems: by the nature of the mental activity of students, by didactic goals, by the type of thinking in the process of solving, and others. A typology of tasks was identified that can be applied in the educational process when monitoring the understanding of educational material.

Keywords: mathematical problem; classification; typology; mental activity.

Формирование способностей отыскивать пути к новым знаниям и применять эти знания на практике — это одна из сложнейших педагогических задач. Важной характеристикой познавательной системы каждого человека, которая обеспечивает возможность успешного выполнения учебной деятельности, является понимание. Знания и действия без понимания могут формироваться лишь с помощью механического заучивания и неосмысленного подражания. Поэтому одной из центральных проблем в обучении становится достижение учеником понимания изучаемого им учебного материала. Наиболее сложным и трудным учебным предметом в школе является математика. Обучение математике происходит, в основном, через обучение решению задач. Рассмотрим некоторые подходы к определению и классификации понятия «школьная математическая задача».

1. Различные подходы к понятию задачи

Достаточно основательно и глубоко психолого-педагогический аспект теории учебных задач рассмотрен в работе Г. А. Балла [1]. Понятие задачи он определяет как систему, обязательными компонентами которой являются исходный предмет задачи, требование задачи и её решение. При этом под решением задачи понимается «воздействие на предмет задачи, обуславливающее её переход из исходного состояния в требуемое» [1, с. 29].

Встречаются в научно-методической литературе и другие термины для обозначения основных компонентов задачи. Если требование задачи заменить на цель, конечное состояние, заключение или вопрос; исходный предмет задачи — на исходное (начальное) состояние или ситуацию; решение — на действие, тогда понятие задачи можно сформулировать как ситуацию, требующую действий для достижения определённой цели. В этом случае основными компонентами задачи будут соответственно цель, ситуация, действия. По словам А. Н. Леонтьева, задача — это цель, данная в определённых условиях [5]. Л. М. Фридман подчёркивает, что задача представляет собой требование или вопрос, на который надо найти ответ, опираясь и учитывая те условия, которые указаны в задаче [12]. Ю. М. Колягин [8], наряду с требованием, условием и решением, выделяет ещё один компонент задачи — обоснование решения.

Опираясь на работы Г. А. Балла и Ю. М. Колягина, дадим следующую трактовку понятия: *под задачей будем понимать систему, обязательными компонентами которой являются условие и требование задачи, а также такое воздействие на условие задачи, которое обуславливает переход от условия к требованию.*

Формулировка задачи — это словесное её описание, частный вид её знаковой модели. Одной задаче могут соответствовать различные синонимические знаковые модели. Например: «При каких значениях не-

известного уравнение $x^2 - 6x + 5 = 0$ имеет решение?» и «Найти корни уравнения $y^2 - 6y + 5 = 0$ ». Формулировка любой задачи содержит одно или несколько условий (утверждений) и одно или несколько требований. В свою очередь каждое условие содержит один или несколько объектов. Если в условии имеется один объект, то указывается его качественная или количественная характеристика: «Точка O – центр окружности» или «Длина отрезка AB равна 7 см». Если же в условии заданы два или более объекта, то указывается соотношение между ними: «Отрезки AB и CK перпендикулярны» или «Пересечением отрезков AB и CK является точка M ».

Для решения любой задачи находят такую последовательность общих положений математики, применяя которые к условиям задачи или к их следствиям удовлетворяют требованиям задачи. Нахождение указанной последовательности шагов и представляет наибольшую трудность в решении задачи. Поэтому для многих задач в самой математике разработаны общие правила (алгоритмы) решения задач определённого вида. Большей частью они сформулированы в свёрнутом виде и чтобы эти свёрнутые правила применить для решения соответствующих задач, их нужно развернуть в пошаговую программу.

К математическим задачам относят как текстовые задачи, так и упражнения, называемые иногда примерами, а также вопросы, которые требуют некоторой продуктивной работы мышления, связанной с применением знаний.

Необходимо различать понятия «задача» и «проблема». Задача как составляющая учебного процесса есть явление объективное. Для ученика она существует с самого начала в материальной форме, чаще всего в знаках или звуках. В субъективное явление задача превращается лишь после её восприятия и осознания. Учебная же проблема субъективна, она существует в сознании ученика в идеальной форме, в мысли, а задача является внешним выражением проблемы [6]. Чтобы задача после восприятия и осознания стала проблемой, необходимо установить, что для её решения нужно знание о новом способе действия. Так, если ученик обладает навыком вычисления производных, то задача нахождения производной некоторой элементарной функции не будет для него проблемой.

Основными элементами учебной проблемы являются «известное» и «неизвестное». При этом известное знание в проблеме включает не только «данное» задачи, но и более широкий круг ранее усвоенных знаний, личный опыт ученика, на основе которых можно определить характер неизвестного. Под неизвестным же имеется в виду и само неизвестное, и цель, и способ достижения цели, и то, что не дано в условии. Задача, получив в сознании ученика новое содержание, превращается в совершенно новое явление — в учебную

проблему. Для иллюстрации приведём следующий пример.

Пример. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 13 см, а один из катетов 5 см.

В этой задаче данное включает в себя гипотенузу и один из катетов прямоугольного треугольника, а требование — найти площадь рассматриваемого треугольника. После восприятия и осознания задача превращается в проблему, где известными будут не только данные задачи, а также положения, относящиеся к прямоугольному треугольнику (теорема Пифагора и формула площади прямоугольного треугольника). Незвестными в этом случае являются второй катет и площадь треугольника, а также цепочка логически верных шагов, приводящая к требованию задачи.

2. Классификация задач по характеру мыслительной деятельности ученика

Школьная задача обычно имеет одно или несколько определённых решений и поэтому называется *определённой*. Если из условия какое-либо данное опустить, то задача становится *неопределённой*, которое имеет бесконечное множество решений. Если же условие содержит дополнительное данное, то задача становится *переопределённой*.

От принципиально неразрешимых задач следует отличать задачи, *разрешимые* или *неразрешимые* для определённого решателя. Это зависит от того, способен ли ученик осуществить процедуру, обеспечивающую решение данной задачи. Часто задача, неразрешимая без доступа к внешней информации, может оказаться разрешимой для того же ученика при наличии такого доступа. Более того, довольно часто для одного ученика задача оказывается неразрешимой, а для другого — разрешима.

Если алгоритмом решения некоторой задаче в той или иной форме обладает ученик, то такую задачу называют *рутинной* [1]. Если учащийся недостаточно усвоил способ действия, которым должен владеть на данном этапе учебного процесса, то следствием этого может быть нерутинность предложенной задачи. Однако достаточно часто, особенно в системе проблемного обучения, нерутинность проектируется специально. В этом случае понятие нерутинной задачи близко к понятию проблемной: задача осознаётся как проблема, способ решения которой ещё неизвестен. При этом имеются в виду способы, которые всегда могут быть представлены как алгоритмы решения задачи и которые гарантируют с достаточно высокой вероятностью это решение.

Математические задачи, для которых в математике имеются готовые правила – программы их решения, называются *стандартными* или *репродуктивными* [12]. При решении стандартной задачи надо распознать её вид, вспомнить соответствующее этому виду правило решения, развернуть это правило в пошаго-

вую программу и применить её к условиям данной задачи. Если же общий метод решения ещё неизвестен, то учащиеся ориентируются на открытие общего решения всех задач этого класса либо самостоятельно, либо с помощью учителя.

В математике для *нестандартных* задач нет готовых правил, поэтому их считают творческими. Решение нестандартных задач сводится к решению одной или нескольких стандартных задач. При поиске способа решения нестандартных задач используют определённые эвристики — правила, которые не могут носить обязательный характер, а лишь указывают на возможные пути поиска. Сложную задачу можно разбить на несколько более простых; попытаться преобразовать её или заменить другой, равносильной ей; ввести вспомогательные элементы, связывающие данные и искомые и др.

Заметим, что нет единой точки зрения на содержание понятий «стандартная» и «нестандартная» задачи. Одни исследователи связывают стандартность (нестандартность) задачи со свойствами её решателя, а другие — с содержанием учебной (школьной) программы. Так, позиция И. О. Харитоновой соответствует первому подходу: он понимает термины стандартная задача и рутинная задача как синонимичные [13].

3. Классификация задач по дидактическим целям

По дидактическим целям и функциям выделяют три основных вида задач: тренировочные, познавательные и развивающие [7].

Тренировочные задания являются наиболее распространённым видом задач в школьном курсе и их главная цель — выработка прочных навыков и умений. Это связано с тем, что в математике имеется определённый набор фактов, подлежащих заучиванию, и алгоритмов, требующих выработки определённых навыков.

Познавательные задачи — это задачи, с помощью которых получают новые знания. При этом различают случаи, когда нахождение искомого невозможно (принципиально или для данного решателя) и когда нахождение искомого возможно, причём может быть найден либо один результат решения, либо конечное или бесконечное число приемлемых различных результатов.

Предмет познавательной задачи уже в исходном состоянии содержит некоторую прямую информацию об искомым. В результате решения задачи достигается необходимое пополнение этой информации. Оно может быть осуществлено разными путями:

- а) использование связей между компонентами предмета задачи, в частности, для преобразования косвенной информации об искомым предметам в прямую;
- б) извлечение решателем недостающей информации из объекта познания;
- в) генерирование решателем недостающей прямой информации.

В зависимости от указанных выше путей пополнения прямой информации можно выделить разновидности познавательных задач [1].

Для решения *мыслительной*, в частности, математической задачи преимущественно используются связи между её компонентами. Этот путь пополнения недостающей информации всегда необходим для решения любой познавательной задачи.

Для решения *перцептивных* (относящихся к сфере восприятия) задач недостающая информация извлекается из объекта познания. К перцептивным относятся, в частности, задачи, где требуется рассмотреть график функции и определить («считать») по данному графику основные свойства функции. Если же требуется также, к примеру, сравнить поведение данной функции на разных промежутках области определения и сделать выводы, или по графику функции дать заключение о свойствах её производной, то должен произойти переход от перцептивной задачи к мыслительной.

Для решения *имагинативных* (активизирующих воображение) задач решающий сам генерирует недостающую прямую информацию. Решение имажинативных задач требуется, в частности, при выполнении различных заданий на построение графика функции, когда надо, опираясь на полученные аналитически (или уже имеющиеся) знания о свойствах функции, представить себе и изобразить искомый график.

К познавательным задачам можно отнести также и *мнемические* задачи, в том числе задачи запоминания и вспоминания. Обеспечение тесной взаимосвязи мнемических и мыслительных задач в процессе учения поможет преодолеть тенденцию учащихся к механическому заучиванию, в частности, путём логического запоминания.

Элементы творческого мышления, встречающиеся в тренировочных и особенно познавательных задачах, не могут полностью обеспечить достижение важнейшей цели современного обучения — развития продуктивного, эвристического, творческого мышления учащихся. С этой целью необходимо систематически решать развивающие задачи, в которых нельзя обойтись одним только логическим мышлением, а требуется проявить ещё математическую интуицию, находчивость, изобретательность, сообразительность, сметливость, гибкость мышления. Большинство математических задач, предлагаемых на олимпиадах и конкурсах различного уровня, относятся к развивающим.

Принадлежность задачи тому или иному классу всецело зависит от знаний, способностей, опыта и психологического состояния решателя, которому она предъявлена. Так, для некоторого решателя задача может вообще не быть задачей, а лишь тренировочным упражнением, а для другого (или для того же решателя в иных условиях, например, на разных ступенях обучения) — выступать как обучающая или даже как поисковая.

4. Классификация задач по типу мышления в процессе их решения

В основание деления задач по типу мышления в процессе их решения кладётся анализ структуры мыслительного процесса в ходе решения задачи. Рассмотрим основные типы таких задач.

Задачи алгоритмического типа.

Если решающий задачу осознаёт как способ действия, так и условия его выполнения, то в этом случае говорят о задаче *алгоритмического типа*. При решении таких задач требуется применить готовый, прочно усвоенный учащимися алгоритм. Алгоритм можно определить как точное предписание последовательного выполнения определённых действий, своего рода свод правил решения серии однородных задач, основанных на едином методе решения [4]. В этом случае имеет место задача, но не существует никакой проблемы.

Примерами задач, решаемых с помощью алгоритма, являются задачи на деление натуральных чисел «уголком», на нахождение наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, на применение алгоритма Евклида для натуральных чисел или многочленов и др.

К задачам алгоритмического типа относятся также и такие, для решения которых используются правила, при этом понятия «правило» и «алгоритм» не всегда совпадают. Правило — понятие более широкое (и в некоторых случаях менее определённое). Всякий алгоритм можно рассматривать как правило, но не всякое правило — это алгоритм [4]. Так, многие математические задачи могут быть решены посредством различных последовательностей одних и тех же операций, которые обычно задаются аналитически в виде формулы. Например, формула площади треугольника $S=0,5ah$, как и все другие аналогичные формулы, не является алгоритмом, т.к. она не предписывает какой-либо одной определённой последовательности действий. Но этой формуле соответствует некоторое правило, а ему — некоторое множество алгоритмических процедур, представляющих собой все возможные последовательности действий по решению данной задачи. Можно сказать, что в формуле это множество алгоритмов содержится как бы в скрытом виде.

Учащихся важно специально обучать умению оценивать, какой алгоритм из множества возможных алгоритмов является в данном случае наиболее рациональным. Как, например, рационально найти координаты вершины параболы $y = x^2 - 4x$?

Чтобы успешно решать такие и подобные им задачи, надо знать не только возможные алгоритмы их решения, но и уметь выбирать из них для данных условий более рациональный.

Большинство задач, связанных с непосредственным применением математических формул, вычисление величин по известным формулам (формулы пути и сокращённого умножения, корней уравнений, площадей

и объёмов, дифференцирования и интегрирования и т.д.) можно отнести к задачам алгоритмического типа, а методы их решения — к алгоритмическим методам.

Задачи полуалгоритмического типа.

Алгоритм решения таких задач известен или осознаётся решающим, но не осознаются условия выполнения действий. Другими словами, для решения таких задач требуется применять готовые алгоритмы, но в новых условиях, применительно к иным исходным данным по сравнению с прежними ситуациями использования этих алгоритмов учеником. Полуалгоритмические задачи требуют для своего решения «обдумывания» очередности «ходов» мысли (программирование этапов решения), планирования действий, которые последовательно ведут к цели.

В некоторых случаях при решении полуалгоритмических задач наряду со стандартными алгоритмическими процедурами применяются частные приёмы. Так, при вычитании дробей с разными знаменателями рекомендуется использовать правило приведения дробей к общему знаменателю, а в случае, если дробь содержит иррациональность в знаменателе, то, как правило, от этой иррациональности необходимо избавиться. Однако при упрощении такого, например, иррационального выражения

$$\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{a - \sqrt{ab} + b}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}},$$

и то, и другое преобразование значительно усложнит решение. Здесь рациональнее вначале упростить вторую дробь, разложив предварительно сумму кубов в знаменателе по известной формуле. Таким образом, для того чтобы разумно выполнять тождественные преобразования даже несложных иррациональных выражений, недостаточно свободно владеть техникой выполнения элементарных преобразований. Здесь необходимо уметь бегло оценивать в каждом конкретном случае возможность и целесообразность применения тех или иных преобразований, что требует выработки специальных навыков ориентировки. Л. Н. Ланда замечает, что целенаправленное обучение алгоритмам поиска и распознавания направлено на формирование умения ориентироваться в определённых ситуациях, т.е. на осуществление ориентировочной деятельности.

К задачам полуалгоритмического типа относятся также задачи, при решении которых наряду с алгоритмическими процедурами используется метод проб [4]. Так, при решении линейных уравнений необходимо члены, содержащие неизвестное, перенести в одну сторону, а свободные члены в другую. Обычно стараются это выполнить так, чтобы после приведения подобных слагаемых коэффициент при неизвестном был положительным. Можно составить алгоритм, однако экономнее мысленно попробовать перенести неизвестное в какую-либо одну сторону и посмотреть, с каким знаком окажется неизвестное. Таким образом, пробы с последующей оценкой их результатов по не-

которому критерию являются в ряде случаев более экономным способом решения задачи, чем действия по алгоритму.

Одним из важнейших полуалгоритмических методов в математике является метод решения задач с помощью составления уравнений.

Задачи эвристического и полуэвристического типов

Если решающий задачу не осознаёт ни способ действия, ни условия его выполнения, то имеем задачу *эвристического* типа. Поиски способов решения такой задачи связаны главным образом с интуитивным мышлением, но возможно применение специальных способов и приёмов эвристической деятельности — эвристик. Решение эвристических задач часто требует догадки и предположений, доказательство которых может осуществляться также и аналитическим путём. Задачами эвристического типа являются олимпиадные задачи. В школьной же практике такие задачи достаточно редки и встречаются, в основном, в геометрии.

Эвристики используются и при решении задач, где действия по алгоритму возможны лишь теоретически (практически алгоритм оказывается невыполнимым). Наиболее известным примером такого рода задач является задача отыскания наилучшего хода в шахматной игре. Примером же из школьной практики могут служить геометрические задачи на доказательство. Для решения таких задач в принципе можно построить алгоритмы, однако решать их на основе этих алгоритмов было бы практически невозможно, так как они потребовали бы огромного перебора. Выход состоит в том, чтобы построить методы, которые значительно сузили бы область поиска решения и позволили бы решать задачи, не осуществляя полного перебора всех возможных вариантов действий. Такими методами являются эвристические, они предполагают опору на накопленный опыт решения задач и использования этого опыта для определения направления поиска, с наибольшей вероятностью ведущего к решению. Эвристические методы могут отличаться друг от друга степенью определённости указаний, входящих в соответствующие предписания. Поэтому и шахматные задачи, и геометрические задачи на доказательство можно отнести к задачам полуэвристического типа. Они решаются с помощью продуктивного мышления, тем или иным сочетанием логического (аналитического) и эвристического мышления.

Приведённая классификация по преобладающему типу мышления близка к приведённой ранее классификации по дидактическим признакам. Действительно, познавательные задачи относятся в основном к полуалгоритмическим, а развивающие — к эвристическим. Тренировочные задачи состоят из алгоритмических (решение однозначно определено соответствующей формулой или правилом) и полуалгоритмических (решение неоднозначно определяется примерной схемой).

5. Другие классификации и типологии задач

Наряду с рассмотренными выше общими типологиями задач, существует довольно много и других классификаций. Укажем некоторые из них.

Достаточно общей классификацией является классификация по отношению компонентов к математике: а) чисто математические (все компоненты — математические объекты); б) прикладные (математическое только решение).

По степени новизны для решателя используемых им при решении задачи знаний и ситуации их применения выделяют репродуктивные, реконструктивно-вариативные, исследовательские и творческие задачи.

Широко распространены более или менее общие классификации задач по их математическому содержанию: по специфике той или иной математической дисциплины (арифметические, алгебраические, геометрические и т.п.); по типу и виду («задачи на движение», «задачи на проценты» и др.).

Важным признаком, по которому все математические задачи делятся на отдельные виды и классы, является характер требования задачи [12]. По этому признаку все задачи делятся на три основных класса: а) задачи на нахождение искомого; при этом искомым могут быть величина, отношение, какой-либо объект, предмет, его положение или форма и т. д.; б) задачи на доказательство и объяснение; в) задачах этого класса требование задачи состоит в том, чтобы убедиться в справедливости некоторого утверждения, или проверить верность или ложность этого утверждения, или, наконец, объяснить, почему имеет место то или иное явление, тот или иной факт; в) задачи на преобразование или построение; в этих задачах требуется преобразовать какое-либо выражение, упростить его, представить в другом виде, построить что-либо (например, геометрическую фигуру или выражение), удовлетворяющее указанным условиям.

Классификацию задач по дидактическим функциям, отличную от описанной выше классификации Н. В. Метельского [7], предлагает А. А. Столяр [11]. Им выделяются следующие классы задач: а) для усвоения понятий; б) для обучения доказательствам; в) для формирования математических умений; г) подготовительные.

По числу неизвестных компонентов Ю. М. Колягин [8] классифицирует задачи следующим образом: а) стандартная (все компоненты известны); б) обучающая (неизвестен один компонент); в) проблемная (неизвестны три компонента).

Рассматриваются также понятия «хорошо определённой задачи» и «плохо определённой задачи» [1]. Здесь речь идёт о предмете задачи, когда, например, не вполне ясно, что, собственно, «дано» в задаче. Такую задачу называют ещё нечёткой задачей. В учебном процессе нечёткость решаемых учащимися задач, может быть обусловлена, в частности, неясностью или

противоречивостью формулировок заданий. Иногда учителя специально предлагают плохо определённые задачи, чтобы учащиеся самостоятельно уточнили условия задачи.

Заметим, что существуют и другие типологии задач. При этом не всегда типология является классификацией в строго научном понимании этого слова. Более того, существуют задачи, которые трудно отнести к какому-либо типу или, наоборот, некоторые задачи можно отнести к различным типам (или классам) задач. Мы же будем придерживаться той точки зрения, что некоторую школьную математическую задачу всегда можно отнести к определённому классу в зависимости от выбора конкретной классификации.

Один из видных педагогов-психологов прошлого века Д. Н. Боголюбский пишет, что для психолога возникает необходимость разработки такой классификации, в основание которой были бы положены особенности процесса решения задач-проблем, объективно отражаемые в рациональных приёмах умственной деятельности. Используя такую классификацию, можно было бы в определённой степени предусмотреть как способы воздействия на умственную деятельность учащихся при решении математических задач, так и увидеть при этом проблемы, вызывающие психологические затруднения [2]. Из всех рассмотренных классификаций наиболее полно отвечает указанным выше требованиям классификация задач Г. А. Балла по преобладающему типу мышления в процессе решения.

Многолетняя работа автора с учащимися школ и студентами вузов показала, что важную роль для осознанного понимания абстрактного математического материала играют задачи, условие или решение которых содержит графический компонент. В. А. Далингер замечает, что «проблемы в знаниях и умениях учащихся при изучении начал математического анализа начинают проявляться с того момента, как только абстрактные математические понятия перестают опираться на визуальные образы» [3, с. 73]. Но не всякий предъявляемый школьнику учебный материал с графическим компонентом выполняет свои познавательные функции. Глядя на график функции или геометрический чертёж, ученик должен не просто смотреть, но и видеть то, что заложено в этих образах.

Как было сказано выше, из множества познавательных задач наряду с мыслительными были выделены перцептивные и имажинативные задачи [1]. Подвиды этих задач с графическим компонентом были рассмотрены П. Г. Сатьяновым [9]. Уточним терминологию, которая применима к задачам с графическим компонентом.

К перцептивным задачам относятся такие, которые связаны со слуховым или зрительным восприятием. В частности, это задачи на чтение приведённого графика функции или геометрического чертежа. Как пра-

вило, после определения по графику свойств функции предлагается сделать некоторые выводы. В этом случае перцептивная задача переходит в мыслительную. Поэтому задачи этого вида можно назвать *перцептивно-мыслительными* (ПМ). Выделяют такие подвиды этих задач:

Задачи ПМ1 или ГРИСО-задачи. В этих задачах условие представлено графическим изображением, а ответ — в виде словесного описания. Примерами могут служить задания на перечисление свойств некоторой функции, график которой предъявлен учащимся.

Задачи ПМ2 или ГРИАНО-задачи. Эти задачи отличаются от предыдущего подвида тем, что ответ надо дать в виде аналитического описания. Это могут быть, например, задачи на нахождение по графику приближённых значений функции или её производной; на задание формулой функции, графики которых изображены и др.

Имажинативные задачи связаны с созданием образа математического объекта по заданным его свойствам, в частности, задания на построение графика функции по известным её свойствам. Однако прежде чем будет создан образ объекта, необходимо провести определённый анализ данных. Поэтому задачи этого вида можно назвать *мыслительно-имажинативными* (МИ). Здесь также можно выделить два подвида.

Задачи МИ1 или СОГРИ-задачи. Это задания, в которых по словесному описанию необходимо изобразить математический объект. Например: изобразить график всюду непрерывной функции, имеющей две точки экстремума.

Задачи МИ2 или АНОГРИ-задачи. В этих задачах, в отличие от предыдущих, условие задаётся аналитическим описанием, по которому выполняют графическое изображение. При этом аналитическое описание поведения функции может быть представлено либо формулой (в этом случае проводится вначале полное или частичное исследование функции по определённому алгоритму, который в учебниках называется обычно примерной схемой исследования функции и построения графика), либо свойства функции записываются аналитически. Например: а) исследовать и построить график функции $y = 3x^4 - 4x^3$;

б) построить график дифференцируемой функции такой, что $f(0) = f(1) = f'(0) = f'(1) = 1$.

Если условие и ответ задачи представлены графическим изображением, то такие задачи назовём перцептивно-имажинативными или ГРИ-задачами. В этих задачах решаемый вначале воспринимает представленный ему чертёж или график, затем, проанализировав изображённое, пытается создать новый образ. Например, по графику некоторой функции изобразить эскиз графика её производной. Конечно, сам анализ графической информации является мыслительной задачей, поэтому правильней этот вид надо бы назвать перцептивно-мыслительно-имажинативным.

Таким образом, нам представляется необходимым выделить следующую типологию задач (рис.1), в основе которой были положены особенности процесса решения задач-проблем, объективно отражаемые в рациональных приёмах умственной деятельности: *алгоритмические, полуалгоритмические, полуэвристические, эвристические, перцептивно-мыслительные, мыслительно-имагинативные и перцептивно-имагинативные*.

Следует заметить, что предложенная типология не является классификацией. Большинство задач с графическим компонентом относятся к задачам полуэвристического и полуалгоритмического типов и для их выполнения необходим высокий (осмысленный или внутренний) уровень понимания математического материала.

Выделенная типология задач позволила автору статьи провести такую процедуру мониторинга как диа-

гностику уровня понимания, необходимого для решения некоторых типов задач из школьных учебников по алгебре и началам анализа [10]. Было выявлено преобладание в учебниках заданий алгоритмического вида, а это предполагает при их выполнении уровень понимания не выше индуктивного, т. е. либо это уровень поверхностного понимания (уровень узнавания), либо это уровень воспроизведения. Недостаточное число заданий полуалгоритмического и полуэвристического видов, а также заданий, содержащих графический компонент, не способствуют углублению понимания математического материала. Это, несомненно, является одной из важных причин низкого уровня понимания учащимися начальных понятий дифференциального исчисления. Проведённое исследование позволяет говорить о возможности применения в учебном процессе классификации математических учебных задач при мониторинге понимания их решения.



Рисунок 1.

Список литературы

1. Балл, Г. А. Теория учебных задач: психолого-педагогический аспект / Г. А. Балл. — М. : Педагогика, 1990. — 184 с. — Текст : непосредственный.
2. Богоявленский, Д. Н. Усвоение знаний / Д. Н. Богоявленский // Педагогическая энциклопедия, т. 4. — М. : 1968. — С. 394. — Текст : непосредственный.
3. Далингер, В. А. Когнитивно-визуальный подход к обучению математике: учеб. пособие / В. А. Далингер,

О. О. Князева. — Омск : Изд. ОмГПИУ, 2004. — 344 с. — Текст : непосредственный.

4. Ланда, Л. Н. Алгоритмизация в обучении / Л. Н. Ланда / Под общей редакцией и со вступительной статьёй Б. В. Гнеденко и Б. В. Бифюкова. — М. : Просвещение, 1966. — 523 с. — Текст : непосредственный.

5. Леонтьев, Д. А. Психология смысла: природа, строение и динамика смысловой реальности / Д. А. Леонтьев. — 2-е, испр. изд. — М. : Смысл, 2003. — 487 с. — Текст : непосредственный.

6. Махмутов, М. И. Проблемное обучение. Основные вопросы теории / М. И. Махмутов. — М.: Педагогика, 1975. — 368 с. — Текст : непосредственный.

7. Метельский, Н. В. Дидактика математики: Общая методика и её проблемы. [Учеб. пособие для вузов]. — 2-е изд., перераб. — Мн.: Изд-во БГУ, 1982. — 256 с. — Текст : непосредственный.

8. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Просвещение, 1980. — 368 с. — Текст : непосредственный.

9. Сатъянов, П. Г. Задачи графического содержания при обучении алгебре и началам анализа / П. Г. Сатъянов // Математика в школе. — 1987. — № 1. — С. 56–60. — Текст : непосредственный.

10. Серегин, Г. М. Педагогический мониторинг понимания учащимися математического материала: монография / Г. М. Серегин. — Новосибирск : Изд. НГПУ, 2012. — 32 с. — Текст : непосредственный.

11. Столяр, А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. — 3-е изд. — Мн.: Высшая школа, 1986. — 414 с. — Текст : непосредственный

12. Фридман, Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: Учителю математики о педагогической психологии. — М.: Просвещение, 1983. — 160 с. — Текст : непосредственный

13. Харитонов, И. О. Совершенствование математической подготовки абитуриентов в системе внешкольного довузовского образования: Дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Харитонов Игорь Олегович. — Екатеринбург, 2000. — 193 с. — Текст : непосредственный.

References

1. Ball, G. A. Teoriya uchebnykh zadach: psichologo-pedagogicheskij aspekt / G. A. Ball. — М.: Pedagogika, 1990. — 184 s. — Текст : непосредственный.

2. Bogoyavlenskij, D. N. Usvoenie znaniy / D. N. Bogoyavlenskij // Pedagogicheskaya enciklopediya, t. 4. — М.: 1968. — С. 394. — Текст : непосредственный.

3. Dalinger, V. A. Kognitivno-vizual'nyj podhod k obucheniyu matematike: ucheb. posobie / V. A. Dalinger, O. O. Knyazeva. — Omsk: Izd. OmGPU, 2004. — 344 s. — Текст : непосредственный.

4. Landa, L. N. Algoritmizatsiya v obuchenii / L. N. Landa / Pod obshchej redakciej i so vstupitel'noj stat'joj B. V. Gnedenko i B. V. Biryukova. — М.: Prosveshchenie, 1966. — 523 s. — Текст : непосредственный.

5. Leont'ev, D. A. Psihologiya smysla: priroda, stroenie i dinamika smyslovoj real'nosti / D. A. Leont'ev. — 2-е, ispr. izd. — М.: Smysl, 2003. — 487 s. — Текст : непосредственный.

6. Mahmutov, M. I. Problemnoe obuchenie. Osnovnye voprosy teorii / M. I. Mahmutov. — М.: Pedagogika, 1975. — 368 s. — Текст : непосредственный.

7. Metel'skij, N. V. Didaktika matematiki: Obshchaya metodika i eyo problemy. [Ucheb. posobie dlya vuzov]. — 2-е izd., pererab. — Мн.: Изд-во БГУ, 1982. — 256 с. — Текст : непосредственный.

8. Metodika prepodavaniya matematiki v srednej shkole: Obshchaya metodika. Ucheb. posobie dlya studentov fiz.-mat. fak. ped. in-tov / V. A. Oganessian, Yu. M. Kolyagin, G. L. Lukankin, V. Ya. Sanninskij. — 2-е izd., pererab. i dop. — М.: Prosveshchenie, 1980. — 368 с. — Текст : непосредственный.

9. Sat'yanov, P. G. Zadachi graficheskogo soderzhaniya pri obuchenii algebre i nachalam analiza / P. G. Sat'yanov // Matematika v shkole. — 1987. — № 1. — С. 56–60. — Текст : непосредственный.

10. Seregin, G. M. Pedagogicheskij monitoring ponimaniya uchashchimisya matematicheskogo materiala: monografiya / G. M. Seregin. — Novosibirsk : Izd. NGPU, 2012. — 132 s. — Текст : непосредственный.

11. Stolyar, A. A. Pedagogika matematiki / A. A. Stolyar. — 3-е izd. — Мн.: Vyshejschaya shkola, 1986. — 414 с. — Текст : непосредственный

12. Fridman, L. M. Psihologo-pedagogicheskie osnovy obucheniya matematike v shkole: Uchitel'yu matematiki o pedagogicheskoy psichologii. — М.: Prosveshchenie, 1983. — 160 с. — Текст : непосредственный

13. Haritonov, I. O. Sovershenstvovanie matematicheskoy podgotovki abiturientov v sisteme vneshkol'nogo dovuzovskogo obrazovaniya: Dis. ... kand. ped. nauk: 13.00.02 / Haritonov Igor' Olegovich. — Ekaterinburg, 2000. — 193 с. — Текст : непосредственный.



НОВОСТИ

В сервисе «Яндекс.Учебник» появились готовые задания нового формата

В 2021/22 учебном году в сервисе «Яндекс.Учебник» появилось важное обновление: готовые задания нового формата. Теперь учитель может не только самостоятельно формировать комплекты карточек из предложенных заданий для разных учебных целей, но и использовать комплекты, подготовленные методистами, а также сюжетные занятия, поддерживающие индивидуальную образовательную траекторию.

Учителю достаточно выбрать тему и просто нажать на кнопку, и ученики отправляются в увлекательное путешествие, помогая героям справляться с трудностями и тренируя предметные умения по данной теме. В зависимости от промежуточных результатов система рекомендует ученикам пройти обучение или дает возможность выполнить задания повышенного уровня сложности: это могут быть нестандартные или практико-ориентированные задания, задания с игровыми элементами или направленные на развитие функциональной грамотности. Такое сюжетное занятие занимает у ученика в среднем от 10 до 15 минут.